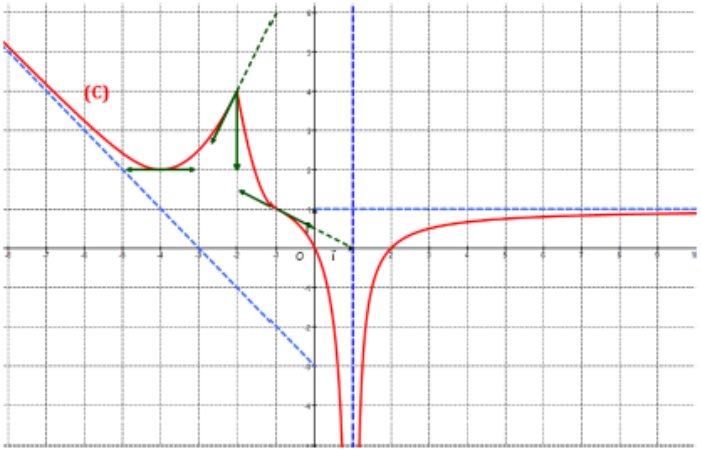
EXERCICE N°1 :	30'	5 points	

La courbe ci-dessous, est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $IR\setminus\{1\}$. On a tracé sur le graphique les asymptotes à **(C)** (droites bleues en pointillés)
Par lecture graphique compléter :



1°) a) $f(-4)$ et $f(2)$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x+3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{f(x)-1}$.

2°) a) $f'(-4)$; $f'(-1)$; $f_g'(-2)$ et $f''(-1)$.

b) Quel est le signe de $f''\left(\dfrac{-1}{2}\right)$?

3°) a) f est-elle dérivable à droite en -2 ?

Déterminer alors $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{f(x)-4}{x+2}$.

b) Déterminer une équation de la tangente T au point d'abscisse -1.

4°) a) Déterminer le signe de f sur IR $\setminus\{1\}$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur IR $\setminus\{1\}$.

5°) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]1;+\infty[$. On désigne par (C_g) la courbe représentative de g et par (Γ) la courbe qui est symétrique de (C_g) par rapport à la droite d'équation $y=x$.

Tracer les courbes (C_g) et (Γ).

EXERCICE N°2 :	30'	5 points	

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1} & si\ x\in]-\infty,-1]\\ -x^3+3x+3 & si\ x\in]-1,+\infty[\end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1.

b) Interpréter graphiquement le résultat.

2°) Montrer que f est dérivable sur $IR\setminus\{-1\}$ et déterminer $f'(x)$.

3°) Dresser le tableau de variation de f.

4°) Montrer que $I(0,3)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ de f.

5°) a) Ecrire l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ en I et étudier sa position par rapport à $\mathscr{C}$ sur $]-1,+\infty]$.

b) Tracer (T) et $\mathscr{C}$.

6°) on pose pour tout $x>0$, $h(x)=f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

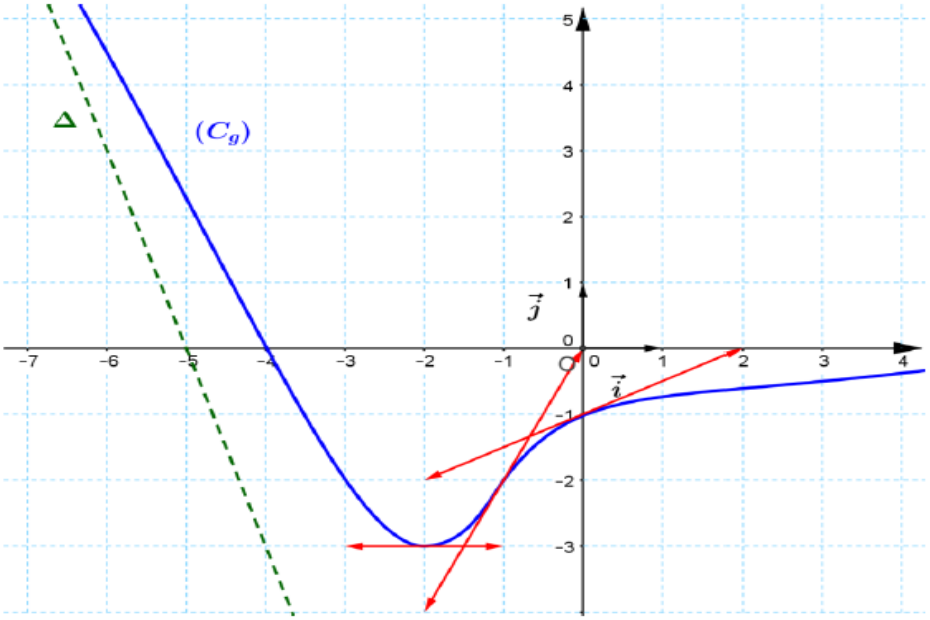
a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$.

b) Montrer que h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer $h'(x)$.

EXERCICE N°3 : | 30' | 5 points

Dans le graphique ci-dessous (C_g) est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'une fonction g dérivable sur IR.

- (C_g) Possède une asymptote oblique Δ au voisinage de $-\infty$.
- L'axe des abscisses est asymptote à (C_g) au voisinage de $+\infty$.



1°) Déterminer par une lecture graphique :

$\lim\limits_{x\to+\infty} g$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)+3x)$, $g\circ g(0)$, $(g\circ g)'(0)$ et $g\circ g([-2,+\infty[)$.

2°) Montrer que l'équation $g'(x)=-1$ admet au moins une solution $c\in]-3,-2[$.

3°) Soit f la fonction dérivable sur IR qui s'annule en (-4) et dont la fonction dérivée f' est la fonction g.

La courbe (C_f) représentative de f possède une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ et une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

a) Dresser le tableau de variation de f sur IR et donner $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b) Justifier que (C_f) possède un unique point d'inflexion I qu'on précisera l'abscisse.

EXERCICE N°4 : 30' 5 points

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in$ IN : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2)$.

1°) Soit la fonction f définie sur $[1,2]$ par : $f(x) = x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$.

a) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [1,2]$ on a : $|f(x) - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|x - \sqrt{2}|$.

2°) a) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in$ IN, $1 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer, que pour tout $n \in$ IN, $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$

c) En déduire que pour tout $n \in$ IN, $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE N°5 : 30' 5 points

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur IR et vérifiant : $f(0) = \frac{1}{4}$ et pour tout $x \in [-1,1]$,

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	-2

1°) Justifier que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[-1,1]$.

2°) Soit la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $-1 \leq u_n \leq 1$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout $n \in IN$, $|u_n - \alpha| \leq 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

d) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3°) Soit $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$,pour tout $n \in IN$. Montrer pour tout $n \in IN$, $f\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq v_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$ et en déduire la limite de (v_n).